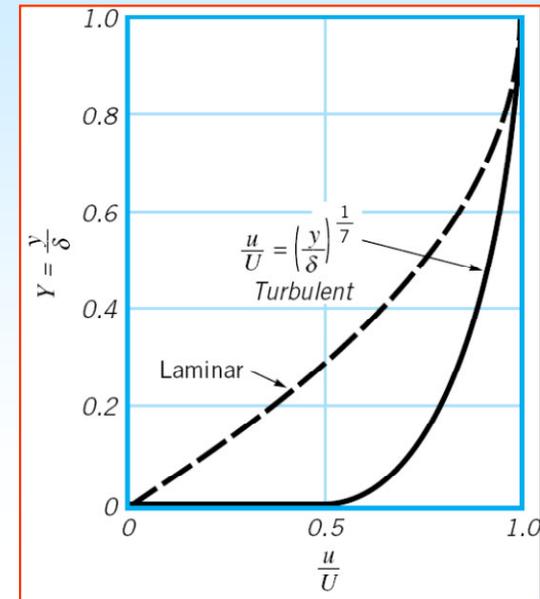
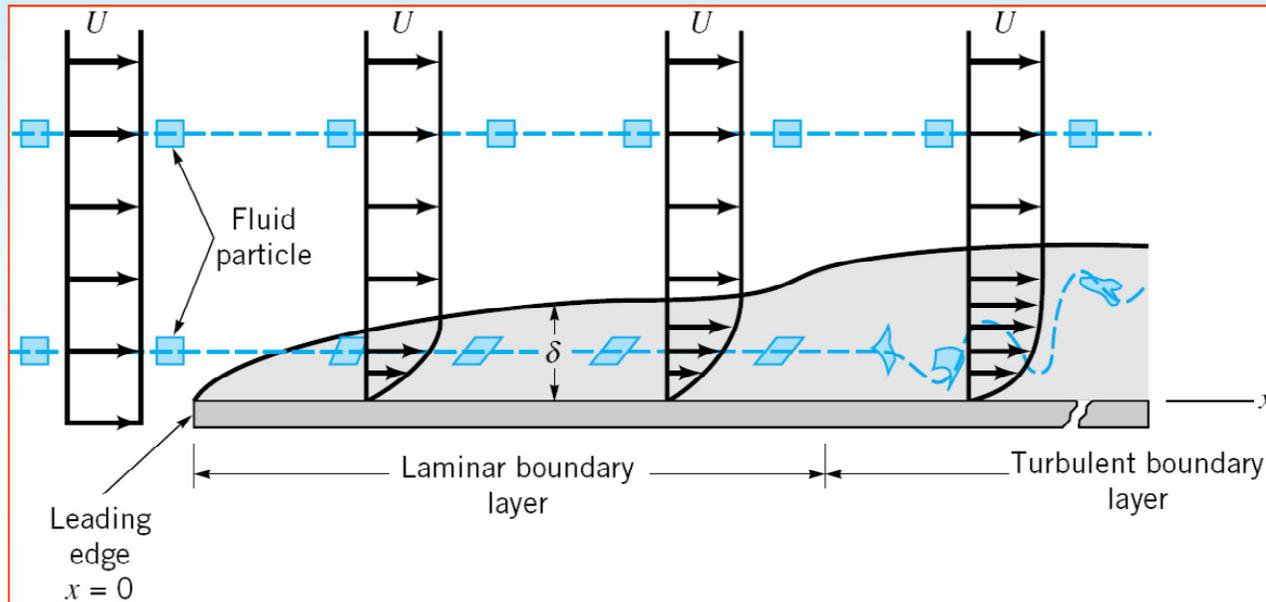


STRATO LIMITE TURBOLENTO SU PIASTRA PIANA

STRATO LIMITE TURBOLENTO - INTRODUZIONE



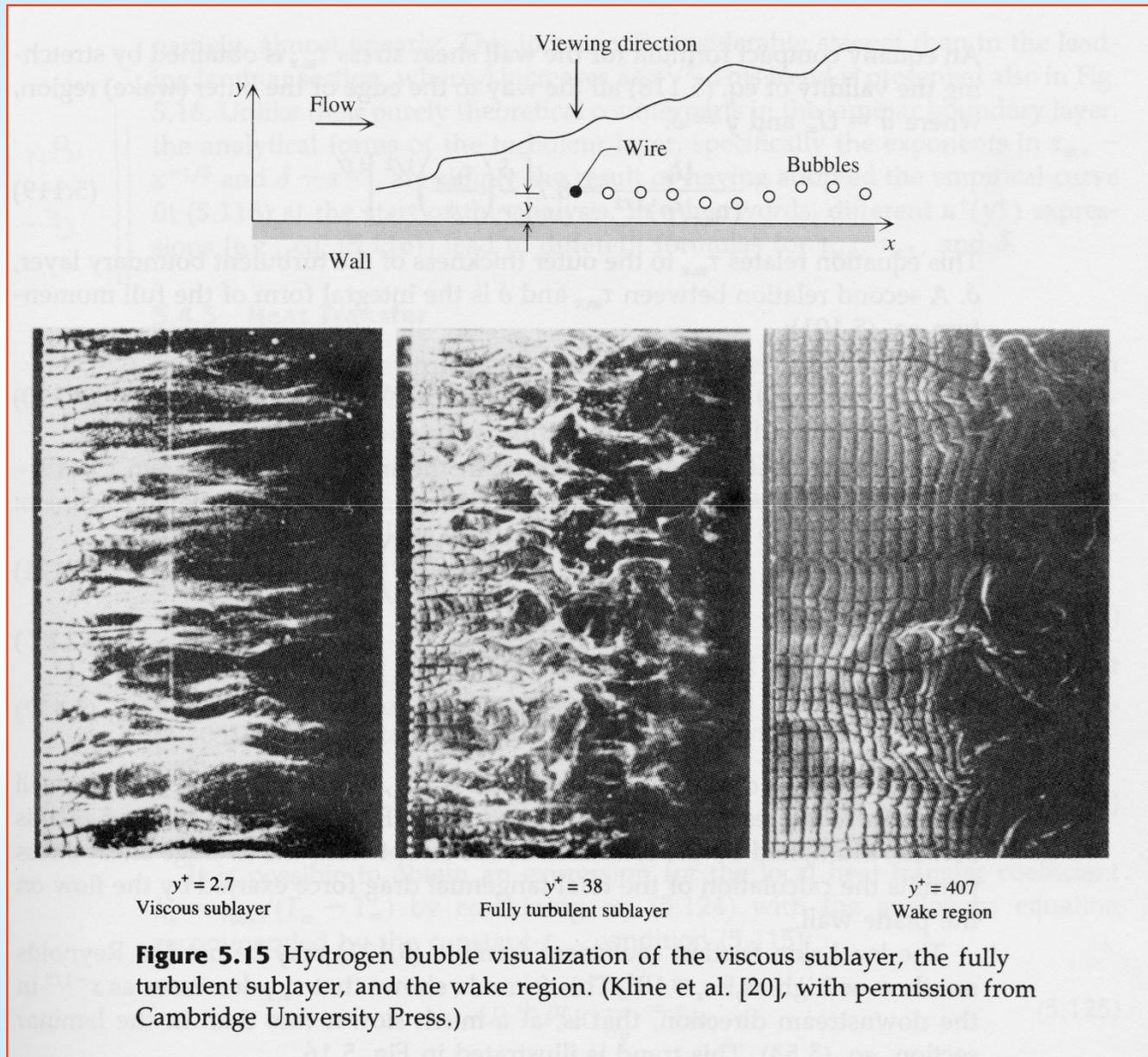
A una certa distanza dal bordo di attacco lo strato limite diviene turbolento.

In prossimità della parete il moto rimane comunque laminare (sottostrato laminare, laminar sublayer).

La transizione, a seconda della geometria e dell'intensità di turbolenza del flusso in ingresso, avviene per $Re_x^* = 2 \times 10^5 - 3 \times 10^6$.

In mancanza di informazioni più precise, si assume $Re_x^* = 5 \times 10^5$.

STRATO LIMITE TURBOLENTO - VISUALIZZAZIONE



STRATO LIMITE TURBOLENTO - EQUAZIONI

Le equazioni dello strato limite turbolento su parete piana sono (richiamo)

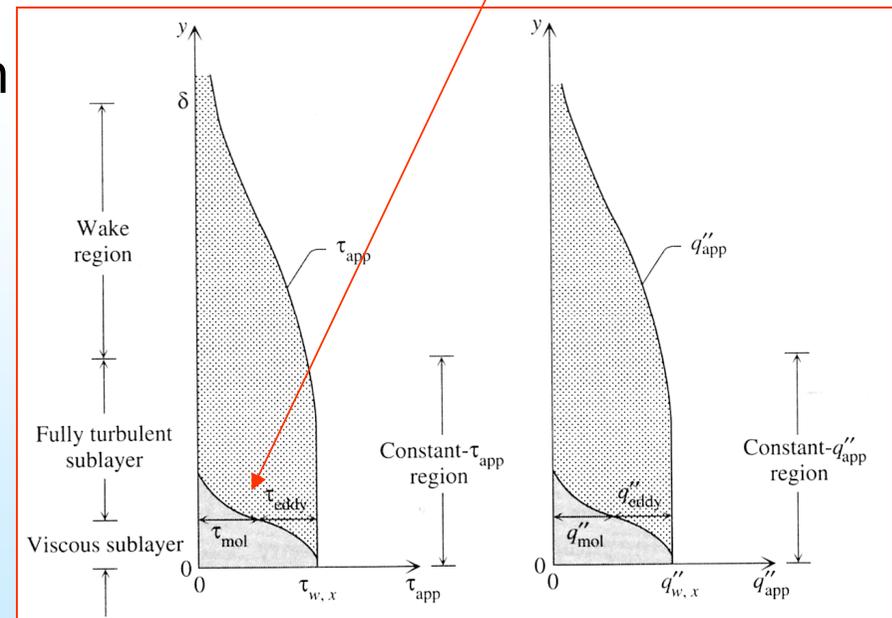
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} = -\cancel{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v_x}{\partial y} - v'_x v'_y \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{mol} + \tau_{eddy}) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \boxed{v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial T}{\partial y} - v'_y T' \right) = -\frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial}{\partial y} (q''_{mol} + q''_{eddy}) \end{array} \right.$$

la componente viscosa di τ_w e q'' aumenta avvicinandosi alla parete

In prossimità della parete (non in tutto lo strato limite) il termine convettivo (in rosso) è basso, per cui, introducendo viscosità e diffusività turbolente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon_M) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{app}}{\rho} \right) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + \epsilon_H) \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{q''_{app}}{c_p \rho} \right) \end{array} \right.$$

ne segue che τ_{app} e q''_{app} sono approx. costanti vicino alla parete



STRATO LIMITE TURBOLENTO – Profilo di velocità (1)

Nel **sottostrato laminare** $\tau_{app} = \tau_{mol}$

$$\tau_{mol} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \rho \nu \frac{\partial v_x}{\partial y} \cong \tau_{app}$$

Integrando *e supponendo* $\tau = \text{cost} = \tau_w$

$$\int_0^{v_x} dv_x = \frac{\tau_w}{\rho \nu} \int_0^y dy \quad \rightarrow \quad v_x = \frac{\tau_w}{\rho \nu} y$$

definendo

si ha $v_x = \frac{v^{*2}}{\nu} y \quad \rightarrow \quad \frac{v_x}{v^*} = \frac{v^*}{\nu} y \quad \rightarrow \quad v^+ = y^+$

| | |
|------------------------------------|--|
| $v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ | velocità di taglio (shear velocity) |
| $y^+ = \frac{v^*}{\nu} y$ | praticamente Re_y |
| $v^+ = \frac{v_x}{v^*}$ | velocità adimensionale |

Nel **core turbolento** invece la tensione di taglio è prevalentemente dovuta alla parte turbolenta; adottando il modello della lunghezza di mescolamento di Prandtl

$$\tau_{tur} = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| \frac{\partial v_x}{\partial y} \cong \tau_{app} \quad \text{e si assume } \ell = K y = 0.4 y$$

è ragionevole che la turbolenza aumenti con la distanza dalla parete;
K = 0.4
sperimentale

STRATO LIMITE TURBOLENTO – Profilo di velocità (2)

Da cui, *supponendo* $\tau = \text{cost} = \tau_w$

$$\tau_{app} = \tau_w = \rho K^2 y^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \rightarrow \frac{dv_x}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{Ky} = \frac{v^*}{Ky}$$

Integrando dal limite del sottostrato laminare a y

$$\int_{v_{lam}}^{v_x} dv_x = \frac{v^*}{K'} \int_{\delta_{lam}}^y \frac{dy}{y} \rightarrow v_x = \frac{v^*}{K'} \ln y + C'$$

Notare che il limite inferiore degli integrali non è zero ma lo spessore del sottostrato laminare

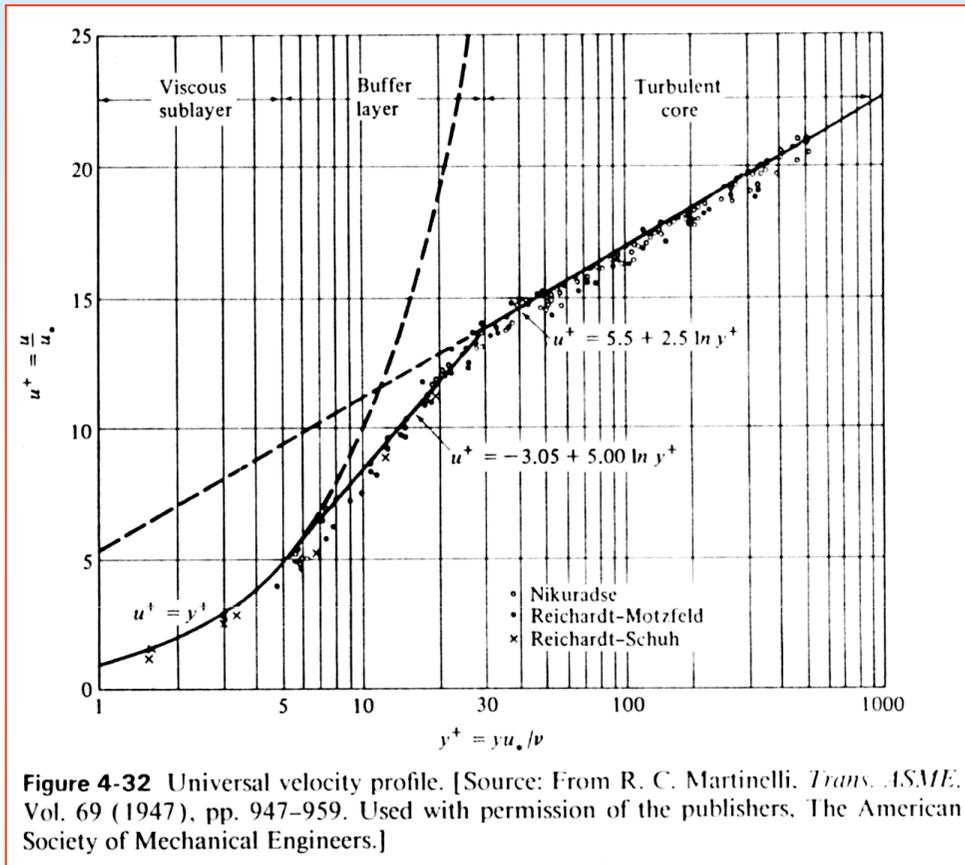
Adimensionalizzando

$$v^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + C \quad \text{sperimentalmente } C = 5.5 \quad (\text{notare che } C \neq C')$$

E' necessaria un'espressione di raccordo tra le due, per cui si ricava infine il cosiddetto *profilo universale di velocità* o *legge della parete*

| | | |
|------------------------------|------------------|----------------------|
| $v^+ = y^+$ | $y^+ < 5$ | sottostrato laminare |
| $v^+ = -3.05 + 5.00 \ln y^+$ | $5 < y^+ < 30$ | buffer layer |
| $v^+ = 5.5 + 2.50 \ln y^+$ | $30 < y^+ < 500$ | core turbolento |

STRATO LIMITE TURBOLENTO – Profilo di velocità (3)

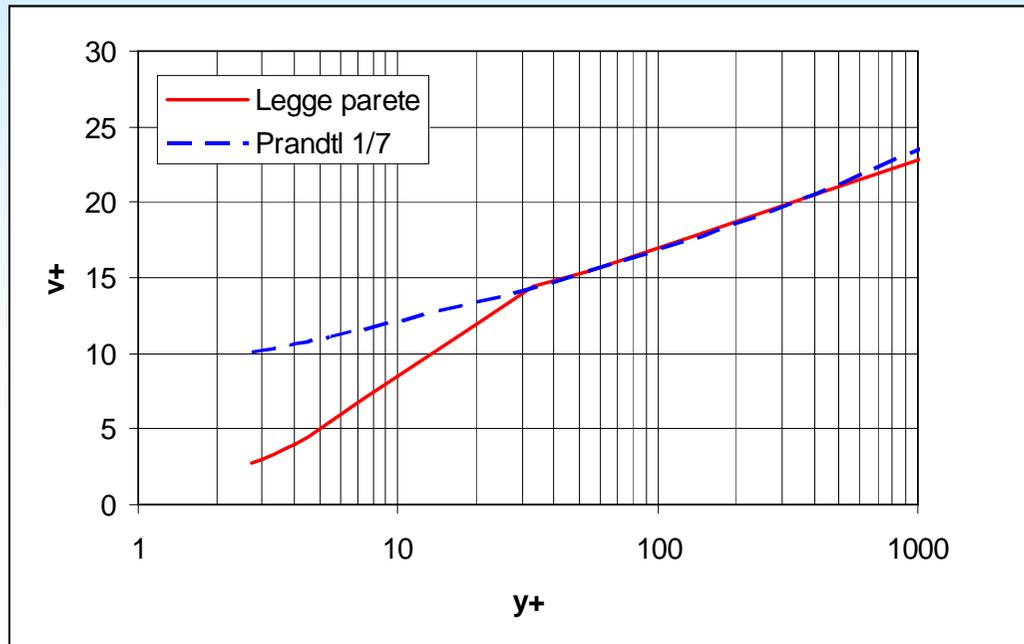


le ipotesi introdotte trovano conferma nell'esperienza

La legge della parete è valida nello strato limite fino a una distanza di 0.2δ (oppure $y^+ < 500$): la cosiddetta *inner region*.

Per distanze superiori (*outer region*) si usa:
$$\frac{U - v_x}{v^*} = \frac{1}{K} \ln \frac{y}{\delta} + A$$
 (dove A dipende dalla geometria)

STRATO LIMITE TURBOLENTO – Profilo di velocità (4)



La legge della parete può essere approssimata come

$$v^+ = 8.7 (y^+)^{1/7}$$

Se la si estende fino al confine dello strato limite ($y = \delta$, $v_x = U$) si ha

$$\frac{U}{v^*} = 8.7 \left(\frac{\delta}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right)^{1/7}$$

$$\frac{v_x}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

dividendo membro a membro le due precedenti

da cui si ha una relazione per lo spessore di quantità di moto

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) dy = \frac{7}{72} \delta$$

STRATO LIMITE TURBOLENTO – Determinazione di τ_w (1)

Per poter trovare la tensione di taglio alla parete è necessaria *un'altra equazione* che dia τ_w in funzione di δ .

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad \text{non si può usare per la inesattezza su } v_x \text{ alla parete (v. figura slide precedente)}$$

Allora si riparte ricavando τ_w da

$$\frac{U}{v^*} = 8.7 \left(\frac{\delta}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right)^{1/7} \rightarrow \frac{U}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = 8.7 \left(\frac{\delta}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right)^{1/7}$$

elevando al quadrato e semplificando (con un po' di lavoro)

$$\tau_w = \frac{\rho U^2}{8.7^{14/8}} \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{0.25} = 0.023 \rho U^2 Re_\delta^{-0.25}$$

ATT: δ e Re_δ sono ancora incogniti !!

Questa relazione è stata confermata per via sperimentale da Blasius. Combinando questa espressione con il bilancio integrale e ric. $\Theta = 7/72 \delta$

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\Theta}{dx} = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = 0.023 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{-0.25}$$

e qui, una volta eliminato τ_w , si può trovare δ

STRATO LIMITE TURBOLENTO – Determinazione di τ_w (2)

Quindi si ha:

$$\frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = 0.023 \rho U^2 \left(\frac{U \delta}{\nu} \right)^{-0.25}$$

semplificando e separando le variabili:

$$\frac{d\delta}{dx} = 0.237 \left(\frac{U \delta}{\nu} \right)^{-0.25} \rightarrow \delta^{0.25} d\delta = 0.237 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{0.25} dx$$

E finalmente, integrando tra $[0, \delta]$ e $[0, x]$

$$\frac{4}{5} \delta^{5/4} = 0.237 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{0.25} x$$

$$\delta = \left(0.237 \frac{5}{4} \right)^{4/5} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} x^{4/5} \rightarrow \frac{\delta}{x} = 0.377 \left(\frac{\nu x}{U} \right)^{1/5} \rightarrow$$

N.B.: espressioni valide
finchè è accettabile il profilo
di velocità $1/7$, ovvero per
 $10^5 < Re_x < 10^7$

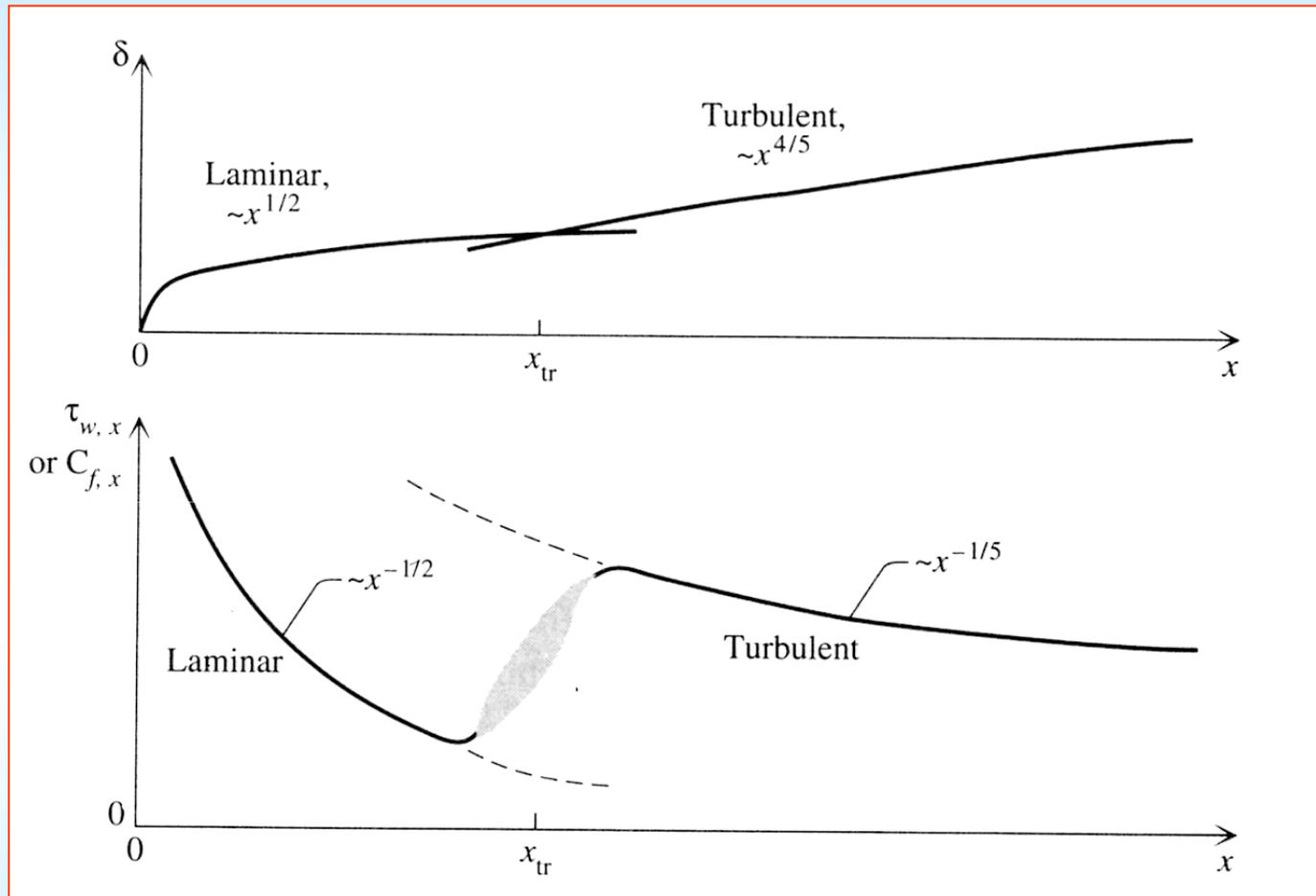
$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.377}{Re_x^{0.2}}$$

$$\tau_w = \frac{0.029 \rho U^2}{Re_x^{0.2}}$$

Da cui si possono ricavare tutti gli altri valori
(δ^* , θ etc.) e in particolare

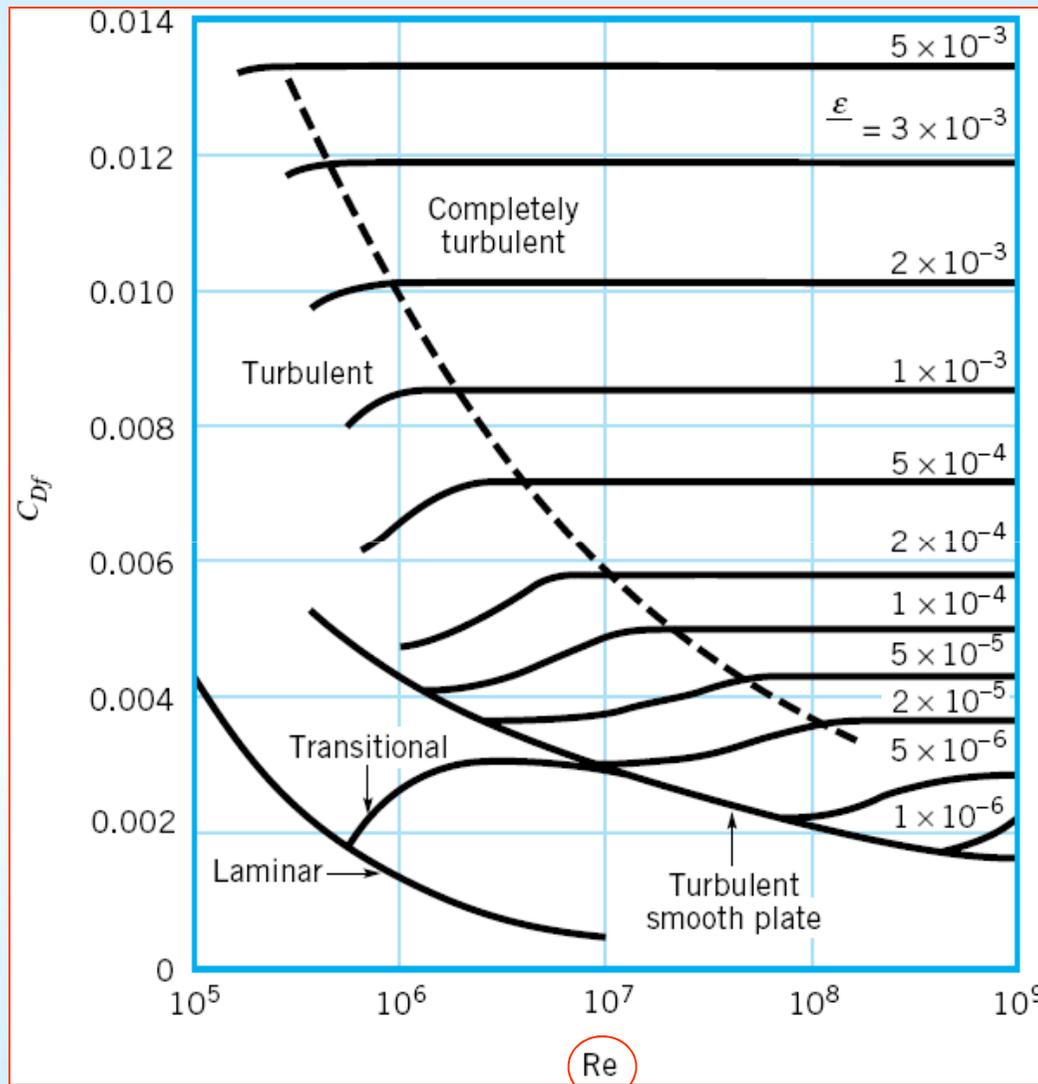
| | Laminare (Blasius) | Turbolento ($10^5 < Re < 10^7$) |
|---|---|---|
| $\frac{\delta}{x}$ | $\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{Re_x^{0.5}}$ | $\frac{\delta}{x} = \frac{0.377}{Re_x^{0.2}}$ |
| $\frac{\delta^*}{x}$ | $\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{Re_x^{0.5}}$ | $\frac{\delta^*}{x} = \frac{0.047}{Re_x^{0.2}} = \frac{\delta}{8x}$ |
| $\frac{\theta}{x}$ | $\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{Re_x^{0.5}}$ | $\frac{\theta}{x} = \frac{0.037}{Re_x^{0.2}} = \frac{7}{72} \frac{\delta}{x}$ |
| τ_w | $\tau_w = \frac{0.332\rho U^2}{Re_x^{0.5}}$ | $\tau_w = \frac{0.029\rho U^2}{Re_x^{0.2}}$ |
| $c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$ | $c_f = \frac{0.664}{Re_x^{0.5}}$ | $c_f = \frac{0.058}{Re_x^{0.2}}$ |
| $C_{D,f} = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$ | $C_{D,f} = \frac{1.328}{Re_L^{0.5}}$ | $C_{D,f} = \frac{0.072}{Re_L^{0.2}}$ |

Andamento dello spessore e della tensione di taglio nello strato limite



Notare che $\delta \equiv x^{4/5}$ deriva da aver supposto $v \equiv y^{1/7}$
 valori diversi da $1/7$ darebbero valori diversi dell'esponente di δ di τ_w

STRATO LIMITE TURBOLENTO – Determinazione di τ_w (3)



Per **piastre scabre** conta anche la rugosità superficiale, e si può usare la relazione semiempirica (valida nella parte a destra in alto del diagramma dove $C_{d,f}$ è indipendente da Re)

$$C_{D,f} = \left[1.89 - 1.62 \log_{10} \frac{\epsilon}{L} \right]^{-2.5}$$

Una piastra è liscia finché le asperità non escono dal sottostrato laminare ($y^+ = 5$) da cui si ottiene la condizione

$$\epsilon < 100 \frac{\nu}{U}$$

STRATO LIMITE TURBOLENTO – Determinazione di h_c (1)

In prossimità della parete, dove il termine convettivo è trascurabile abbiamo (v.slide 4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{app}}{\rho} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{app} = \rho (\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial v_x}{\partial y} = \text{cost} = \tau_w \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q''_{app}}{c_p \rho} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad q''_{app} = -\rho c_p (a + \varepsilon_H) \frac{\partial T}{\partial y} = \text{cost} = q''_w \end{array} \right.$$

Introducendo, in analogia a Pr , il numero di Prandtl turbolento $Pr_T = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H}$ supponendo $Pr = 1$, $Pr_T = 1$ si ha, dividendo m. a m. le precedenti

$$\frac{1}{c_p} \frac{dv_x}{dT} = -\frac{\tau_w}{q''_w} \quad \text{e integrando fino al confine dello strato limite}$$

(non sarebbe rigorosamente possibile, in quanto le precedenti "valgono" solo nel sottostrato laminare)

$$\frac{U}{c_p (T_w - T_\infty)} = \frac{\tau_w}{q''_w} \quad \rightarrow \quad h_c = \frac{q''_w}{(T_w - T_\infty)} = \frac{c_p \tau_w}{U} \quad \text{e dividendo per } \rho c_p U$$

$$\frac{h_c}{\rho c_p U} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{1}{2} c_f \quad \rightarrow \quad St_x = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} = \frac{1}{2} c_f$$

ANALOGIA DI REYNOLDS

numero di Stanton

fattore di Fanning

STRATO LIMITE TURBOLENTO – Determinazione di h_c (2)

Nel caso in cui Pr sia diverso da 1, l'analogia di Reynolds si modifica empiricamente in

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{1}{2} c_f \quad \text{ANALOGIA DI REYNOLDS-COLBURN}$$

dato che (v. slide 11) $c_f = 0.058 Re_x^{-0.2}$

$$St_x Pr^{2/3} = 0.029 Re_x^{-0.2} \quad \rightarrow \quad \boxed{Nu_x = St_x Re_x Pr = 0.029 Re_x^{0.8} Pr^{1/3}}$$

Nel calcolare il valor medio su tutta la piastra bisogna tener conto del tratto di ingresso laminare per cui

$$\overline{Nu_L} = 0.037 Pr^{1/3} (Re_L^{0.8} - 23550)$$

ESEMPIO: calcolo di τ_w e T_w su una piastra piana -1

Piastra piana $b = 1.5 \text{ m}$, $L = 3 \text{ m}$, $U = 7.5 \text{ m/s}$, aria ($\nu = 1.46 \times 10^{-5}$, $\rho = 1.23$) $q' = 200 \text{ W/m}^2$, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$

Determinare: $\delta(x)$, $\delta(L)$, $\tau_w(x)$, F_D , $T_w(x)$

Per $x=L$, si ha $Re_L = \frac{UL}{\nu} = 1.54 \times 10^6$ quindi lo S.L. è turbolento all'uscita

La transizione avviene a $x = 0.97 \text{ m}$ (corrisp. a $Re_x = 500000$)

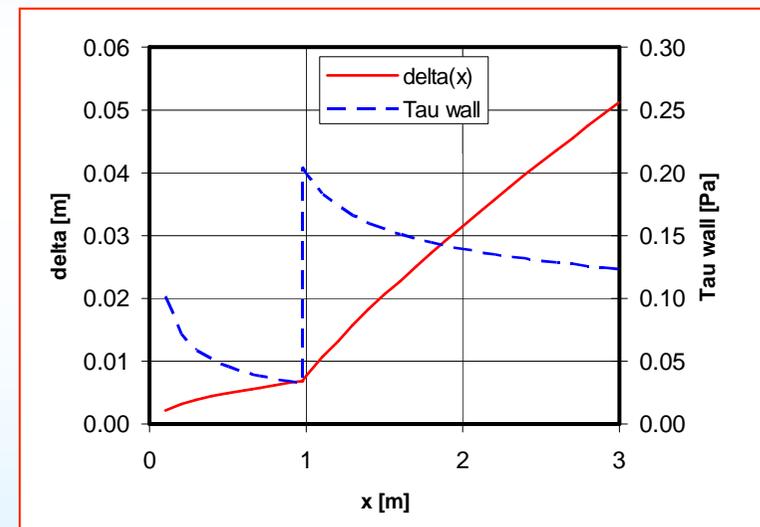
quindi per $x < 0.97$

$$\delta = x \frac{4.91}{Re_x^{0.5}} \quad \tau_w = \frac{0.332 \rho U^2}{Re_x^{0.5}}$$

e per $x > 0.97$

$$\delta = x \frac{0.377}{Re_x^{0.2}} \quad \tau_w = \frac{0.029 \rho U^2}{Re_x^{0.2}}$$

Per C_D si considera solo la parte turbolenta $C_{Df} = \frac{0.072}{Re_L^{0.2}} = .0042$



$$F_D = C_{D,f} \frac{\rho U^2}{2} b L = 1.28 \text{ N}$$

ESEMPIO: calcolo di τ_w e T_w su una piastra piana -2

per $x < 0.97$

$$Nu_x = 0.453 Re_x^{0.5} Pr^{0.33}$$

per $x > 0.97$

$$Nu_x = 0.029 Re_x^{0.8} Pr^{1/3}$$

e infine si ricava h_c

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda_f} \rightarrow h_{c,x} = \frac{Nu_x \lambda_f}{x}$$

$$q'' = h_{c,x} (T_w - T_\infty) \rightarrow T_w = T_\infty + \frac{q''}{h_{c,x}}$$

